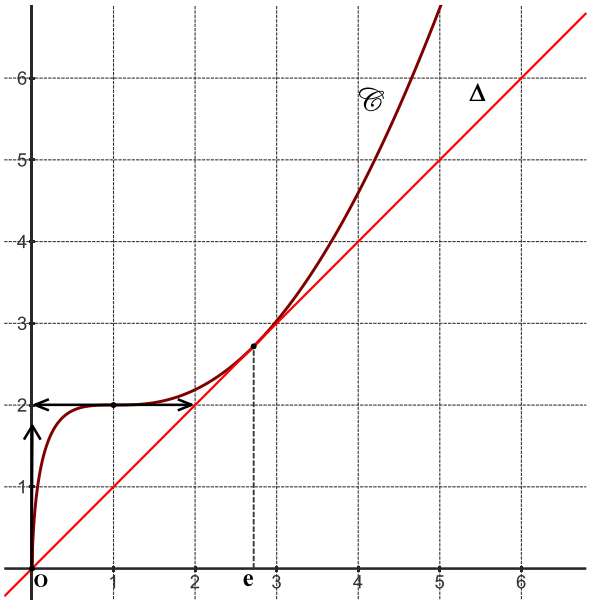
EXERCICE N°1 — 6points

Dans l'annexe ci-joint, on a représenté, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$; $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale en O et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1

La droite Δ d'équation : $y=x$ est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e et $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$

1) A l'aide des données ci-dessus et une lecture graphique
   a) Donner $f(0); f(1); f(e); f'(1); f'(e); \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}; \lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
   b) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$
   c) Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1} la fonction réciproque de f dans le même repère
2) On admet que pour tout $x>0$; $f(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$
   Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$
3) Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$
   a) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_1=\dfrac{e^2+1}{4}$
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n$
   c) En déduire que $I_2=\dfrac{e^2-1}{4}$
   d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}, I_n\geq 0$ et déduire que $I_n\leq\dfrac{e^2}{n+1}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$
4) a) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations : $y=0$, $x=1$ et $x=e$
   b) Interpréter graphiquement puis calculer l'intégrale : $I=\int_2^e\left(f^{-1}(x)-1\right)dx$.



EXERCICE N°2 — 6points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points :
$A(1,1,-1)$; $B(3,3,0)$; $C(1,3,1)$ et $I(2,-1,1)$

1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

b) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

c) Calculer l'aire du triangle ABC

2) a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par A, B et C est $x-2y+2z+3=0$

b) Montrer que les points A, B, C et I ne sont pas coplanaires

c) Calculer le volume du tétraèdre ABCI

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$

a) Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon $R=3$

b) Vérifier que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

c) En déduire que le plan P est tangent à la sphère S en A.

4) a) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par l'origine O et parallèle au plan P

b) Montrer que S et Q sont sécants suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le rayon et les coordonnées de
son centre J.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com